Chapitre 24 : Compléments d'analyse

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2\, e^{3x+1}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer l'expression de $f^{(n)}(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{1/x}$ si $x < 0$, $f(0) = 0$ et $f(x) = x^5 \ln x$ si $x > 0$.

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
2. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?
3. f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 Soit un entier naturel n non nul et une fonction f, n fois dérivable sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$), et s'annulant en $n + 1$ points distincts de $[a, b]$.

1. Montrer que la dérivée de f s'annule en au moins n points distincts de $]a, b[$.
2. Montrer qu'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.
3. Application : montrer que, pour tout polynôme P, l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ a un nombre fini de solutions (éventuellement aucune).

Exercice 4 Pour tout entier naturel n, on considère l'application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour tout réel x par :

$$H_n(x) = (-1)^n \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}} \left(\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\right)^{(n)},$$

où l'on a noté de façon un peu abusive, mais consacrée par l'usage pour sa commodité, $(f(x))^{(n)}$ à la place de $f^{(n)}(x)$.

Pour tout entier naturel n non nul, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$.

Exercice 5 On désigne par n un entier naturel non nul.

1. Exprimer la dérivée $n^{\text{ème}}$ de la fonction f définie par $f(x) = \ln(1 + x)$.
2. Montrer que, pour tout réel x positif :

$$\left|\ln(1+x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k\right| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

3. En déduire que la série $\displaystyle\sum \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge et donner sa somme.

Exercice 6 Calculez les développements limités indiqués :

1. $DL_3(0)$ de $f(x) = 3\cos x - \ln(1 + x)$
2. $DL_3(0)$ de $g(x) = e^x \sin(2x)$,
3. $DL_3(0)$ de $h(x) = (3x^2 + 5)\ln(1 + 3x)$
4. $DL_3(0)$ de $i(x) = xe^{2-x}$.
5. $DL_3(0)$ de $u : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1 - x}$
6. $DL_3(0)$ de $v : x \mapsto e^x \dfrac{\sin x}{x}$
7. $DL_4(0)$ de $w(x) = \dfrac{\ln(1 + x^2)}{1 - x}$.

Exercice 7 Calculez les limites en 0 de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f : x \longmapsto \dfrac{e^x - \sqrt{1 + x}}{x}$
2. $g : x \longmapsto \dfrac{x^3}{x\cos x - \sin x}$
3. $h : x \longmapsto \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(1 + x)}$
4. $f(x) = \dfrac{(\sin x)\sqrt{1 + x^2} - x}{x^3}$

Exercice 8 (Un exemple de développement asymptotique)

1. Rappeler le développement limité de $\ln(1+u)$ à l'ordre 2 lorsque u est au voisinage de 0.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$.

Exercice 9 Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, où f est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

1. Donner un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de 0.
2. **Application** : donner un équivalent, lorsque n est au voisinage de $+\infty$, de :

$$\int_0^{1/n} \ln(1+x)\,dx.$$

Exercice 10

1. Soit $f : x \mapsto \ln(x) + e^{x-1}$. Déterminez l'équation de la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ et la position relative de cette tangente au voisinage de 1.
2. Soit $f : x \mapsto \dfrac{1 - \sqrt{x^2+2x-2}}{x-1}$. A l'aide d'un DL au voisinage de 1, montrez que f peut se prolonger par continuité et discutez de la courbe de f au voisinage de 1.

Exercice 11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = -1$.

1. A l'aide d'un développement limité à l'ordre 2 de $e^{-x} - 1$, montrez que f est dérivable en 0 et donnez $f'(0)$
2. Calculer la limite de $f'(x)$ quand x tend vers 0.
3. En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 12 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})$. Préciser son ensemble de définition.

1. Soit $g(x) = xf(\frac{1}{x})$. Déterminez un développement limité en 0 à l'ordre 2 de $g(x)$.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $f(x) = x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
3. Qu'en déduit-on ?
4. Utilisez la même technique pour étudier le comportement en $+\infty$ des fonctions suivantes :
   a) $f : x \longmapsto \dfrac{x}{x-1}\sqrt{x^2+1}$
   b) $f(x)x \longmapsto \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Exercice 13 * Donner le développement limité en 0 à l'ordre 10 de

$$u(x) = \frac{1}{(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^5)}$$

En déduire le nombre de solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $a + 2b + 5c = 10$.

Exercice 14 * Soit $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\exp((n+1)x) - 1}{\exp(x) - 1} & \text{si } x \neq 0, \\ n+1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Calculer le développement limité de f en 0 à l'ordre 3.
2. En déduire la valeur de :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3.$$

Exercice 15 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1}$ si $x \neq 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier les branches infinies de la courbe C_f et la position de C_f par rapport à ses asymptotes.
3. Déterminer $f'(x)$ pour $x \neq 0$, calculer la limite de $f'(x)$ en 0 à l'aide du D.L. d'ordre 2 en 0

   En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Préciser $f'(0)$.
4. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
5. Déterminer la fonction g telle que, pour $x \neq 0$, $f''(x) = \dfrac{g(x)e^x}{(e^x - 1)^3}$.
6. En utilisant un D.L. d'ordre 3 en 0 de e^x, montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f''(0)$.
7. Etudier g et montrer que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Étudier la convexité des fonctions f et g suivantes :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (\ln x)^2 \end{array}$

2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - 1 - x - \dfrac{1}{2}x^2 \end{array}$

Exercice 17 Soit $\mathcal{D} =]-\infty; 0[\cup]0; 1[\cup]1; +\infty[$.
On note f la fonction définie sur $\mathcal{D}$ par : $f(x) = \ln\left|\dfrac{x-1}{2x}\right| - x$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{D}$.
2. Etudier les branches infinies de la courbe de f.
3. Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation complet.
4. Soit g la restriction de f à $]\,0\,;\,1\,[$.
   Montrer que g est une bijection de $]\,0\,;\,1\,[$ sur $\mathbb{R}$.
5. Sans calculer $g^{-1}(x)$, montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer le nombre dérivé $(g^{-1})'(-\dfrac{1}{2} - \ln 2)$.

Exercice 18 En utilisant la convexité (ou la concavité) de fonctions connues, montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall x > -1, \ln(1 + x) \leq x$.
2. $\forall x \in [1, \mathrm{e}], \ln x \geq \dfrac{x-1}{\mathrm{e} - 1}$.
3. $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \dfrac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$.

Exercice 19 Soit la fonction f définie pour tout réel x par :

$$f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Déterminer les points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 20 Soit n un entier naturel non nul. Montrer que, pour tout n-uplet de réels strictement positifs $(x_1, \ldots, x_n)$, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Exercice 21 Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

1. a) Montrer que, pour tout réel x positif ou nul, la série de terme général $f_n(x)$ est convergente. On note $F(x)$ sa somme.

   b) Calculer $F(0)$ et $F(1)$.

   c) Prouver que, pour tout réel x positif ou nul, la série de terme général $f_n'(x)$ est convergente. On note $G(x)$ sa somme.

2. Soit φ la fonction définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(t) = \frac{1}{t}$$

   a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall (a,b) \in \Big[n, +\infty\Big[^2, \big|\varphi(b) - \varphi(a) - (b-a)\varphi'(a)\big| \leqslant \frac{(b-a)^2}{n^3}$$

   b) Soient $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^+$ tel que $x + h \in \mathbb{R}^+$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \big|f_n(x+h) - f_n(x) - h f_n'(x)\big|$$

   Prouver que la série de terme général u_{n} est convergente.

3. a) Montrer qu'il existe un réel K tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tels que $x + h \in \mathbb{R}^+$:

$$\left|\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - G(x)\right| \leqslant K|h|$$

   b) En déduire que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que : $F' = G$.

4. a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f_{k+1}(x) \leqslant \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant f_k(x)$$

   b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$ et $n \geqslant 2$. Montrer que :

$$\int_1^{n+1} \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \int_1^n \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) \mathrm{d}t$$

   c) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(x+1) \leqslant F(x) \leqslant \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$

   d) Déterminer finalement un équivalent simple de F au voisinage de $+\infty$.